OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2002 (31)

Súčinové magické štvorce a kocky

Marián Trenkler

Abstract: (Multiplicative magic squares and cubes.) A multiplicative magic square is a square matrix containing different natural numbers such that the product of the numbers along every row, column and two diagonals is the same. A multiplicative magic cube is defined in a similar way. In this paper we give several ways to construct multiplicative magic squares and cubes. We end this paper by stating some original problems.

Magické štvorce fascinujú ľudí už mnoho storočí. V 17. storočí sa začali študovať magické kocky. (V citovanej literatúre čitateľ nájde viac informácií o magických štvorcov a ich zovšeobecneniach.) Môžeme si položiť otázku, či existujú podobné tabuľky čísel, v ktorých podmienka rovnakých súčtov čísel v každom riadku, stĺpci a na každej diagonále je nahradená podmienkou rovnakých súčinov. V tomto prípade však vynecháme predpoklad, že všetky čísla tabuľky tvoria aritmetickú postupnosť. Na *obrázku 1* sú tri štvorcové tabuľky 3×3, 4×4 a 5×5, v ktorých sú umiestnené navzájom rôzne prirodzené čísla tak, že súčin čísel v každom riadku, stĺpci aj na oboch diagonálach je rovnaký. V prvej tabuľke súčin čísel v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach je $2^{15} = 32\ 768$, v druhej $7! = 5\ 040$ a v tretej $9! = 362\ 880$.

2^2	2^7	2^6
2^9	2^5	2^1
2^4	2^3	2^8

1	24	14	15
21	10	4	6
20	7	18	2
12	3	5	28

1	15	42	16	36
14	32	9	3	30
27	6	10	28	8
20	7	24	54	2
48	18	4	5	21

Obrázok 1

Súčinový magický štvorec rádu n je 2-rozmerná tabuľka $n \times n$ (štvorcová matica rádu n)

$$\mathbf{M}_n = |\mathbf{m}_n(i,j); \quad 1 \le i,j \le n|,$$

ktorá obsahuje n^2 navzájom rôznych prirodzených čísel tak, že súčin čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je rovnaký. Tento súčin nazývame *magická konštanta* $\mathbf{M}_n$ a označujeme symbolom $\sigma(\mathbf{M}_n)$.

Aj keď o magických štvorcoch bolo napísaných mnoho prác, podobné tvrdenie neplatií o súčinových magických štvorcoch. Pravdepodobne prvé úvahy o ich existencii sú v knihe *Arithmetica Integra* vydanej v roku 1544 známym nemeckým matematikom a teológom

Michaelom Stifelom (1486 – 1567), ktorý sa preslávil svojou predpoveďou konca sveta. Jednou z mála prác venovaných súčinovým magickým štvorcom je [2].

V tomto príspevku sa zaoberáme súčinovými magickými štvorcami a ich trojrozmernými analógiami. Keď sa matematik začína zaoberať súčinovými magickými štvorcami, potom si môže položiť nasledujúce otázky:

1. Pre aké hodnoty parametra n existuje súčinový magický štvorec rádu n?
2. Aká je najmenšia magická konštanta pre danú hodnotu n?
3. Koľko je navzájom rôznych súčinových magických štvorcov s danou magickou konštantou?

Keď si pozorne pozriete súčinový magický štvorec rádu 3, ktorý je na *obrázku 1* a uvedomíte si, že magický štvorec rádu n existuje pre všetky $n \neq 2$, potom odpoveď na prvú otázku je zrejmá. Ak každé číslo m magického štvorca rádu n nahradíme číslom 2^m, tak dostaneme súčinový magický štvorec rádu n s magickou konštantou $2^{\frac{n(n^2+1)}{2}}$. K tomuto poznaniu dospel už francúzsky matematik a filozof *Blaise Pascal* (1623 – 1662). S jeho menom sa spája nielen zavedenie matematických symbolov pre umocňovanie a odmocňovanie, ale aj štvorec $\mathbf{M}_3$, ktorý je na *obrázku 1*. Vo všeobecnosti odpoveď na druhú otázku zatiaľ nepoznáme. V práci [2] je (rozborom všetkých možnosti) dokázané, že najmenšia možná magická konštanta súčinového magického štvorca rádu 4 je $7!$. Pre iné hodnoty parametra n pravdepodobne nebola publikovaná minimálna hodnota $\sigma(\mathbf{M}_n)$. Nazdávame sa, že odpoveďou na tretiu otázku sa matematici ešte nezaoberali.

V ďalšej časti sa zaoberáme otázkou, ako vytvoriť súčinové magické štvorce s menšou magickou konštantou ako $2^{\frac{n(n^2+1)}{2}}$ a ako vznikli štvorce na *obrázku 1*. V práci [9] je uvedená konštrukcia magických štvorcov nepárneho rádu z dvojice ortogonálnych latinských štvorcov. Súčinový magický štvorec $\mathbf{M}_n = |\mathbf{m}_n(i,j)|$ rádu n pre všetky nepárne čísla n zostrojíme použitím vzorca (symbol $x \pmod n$ označuje nezáporný celočíselný zvyšok čísla x po delení číslom n)

$$\mathbf{m}(i,j) = 2^{(i-j+\frac{n-1}{2}) \pmod n} \cdot 3^{(i+j-\frac{n+3}{2}) \pmod n}$$

2	0	1
0	1	2
1	2	0

1	0	2
2	1	0
0	2	1

$2^2 3^1$	$2^0 3^0$	$2^1 3^2$
$2^0 3^2$	$2^1 3^1$	$2^2 3^0$
$2^1 3^0$	$2^2 3^2$	$2^0 3^1$

Obrázok 2

Na *obrázku 2* je dvojica ortogonálnych latinských štvorcov a z nich vytvorený súčinový magický štvorec $\mathbf{M}_3$. Jeho magická konštanta $\sigma(\mathbf{M}_3) = (2 \cdot 3)^3 = 216$ je podstatne menšia ako magická konštanta štvorca rádu 3 na *obrázku 1*. Pretože na jednej z diagonál oboch latinských štvorcov sú rovnaké čísla, podobným spôsobom nevytvoríme štvorec rádu 3 s menšou magickou konštantou. Súčinové magické štvorce $\mathbf{M}_4$ a $\mathbf{M}_5$, ktoré sú na *obrázku 1*, boli zostrojené inou metódou. V posledných desaťročiach sa začali študovať *diagonálne latinské štvorce*, ktoré majú (nielen v riadkoch a stĺpcoch) aj na oboch diagonálach čísla $0,1,2,\ldots,n-1$. Konštrukcia štvorcov $\mathbf{M}_4$ a $\mathbf{M}_5$, vychádza z dvojice ortogonálnych diagonálnych latinských štvorcov. Štvorec $\mathbf{M}_4$ (na pravej strane *obrázku 3*) dostaneme, ak v prvom latinskom štvorci postupne nahradíme čísla $0,1,2,3$ číslami $1,2,3,4$, v druhom číslami $1,5,6,7$ a čísla v príslušných políčkach navzájom vynásobíme. Podobným spôsobom sme zostrojili aj $\mathbf{M}_5$ z dvojice ortogonálnych latinských štvorcov rádu 5. V prvom štvorci sme pri substitúcií použili čísla $1,2,3,4,6$ a v druhom $1,5,7,8,9$ (pri substitúcii sme museli rešpektovať fakt, že $3\times 8 = 4\times 6$.)

0	3	1	2
2	1	3	0
3	0	2	1
1	2	0	3

0	2	3	1
3	1	0	2
1	3	2	0
2	0	1	3

$1\cdot 1$	$4\cdot 6$	$2\cdot 7$	$3\cdot 5$
$3\cdot 7$	$2\cdot 5$	$4\cdot 1$	$1\cdot 6$
$4\cdot 5$	$1\cdot 7$	$3\cdot 6$	$2\cdot 1$
$2\cdot 6$	$3\cdot 1$	$1\cdot 5$	$4\cdot 7$

Obrázok 3

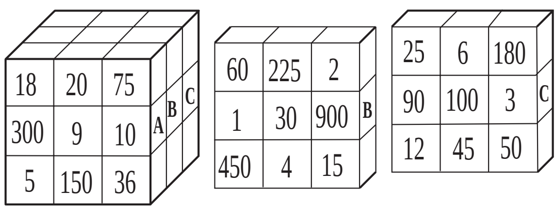
Podobným spôsobom môžeme zostrojiť súčinové magické štvorce vyšších rádov tak, že nájdeme dvojicu ortogonálnych diagonálnych latinských štvorcov a vhodnú substitúciu. Vo všeobecnosti konštrukcia takýchto dvojíc latinských štvorcov nie je jednoduchá. V [5] je dokázané, že dvojica ortogonálnych diagonálnych latinských štvorcov existuje pre všetky hodnoty $n \neq 2,3,6,10,14,15,18,26$. Použitím modifikácií konštrukcií z prác [7, 9] a konštrukčných krokov z tejto práce môžeme urobiť jednoduchý program pre počítač, ktorý vytvorí súčinový magický štvorec rádu n pre všetky $n \neq 2$.

V posledných rokoch boli publikované jednoduché algoritmy na vytváranie magických kociek. Štúdium magických kociek nás priviedlo k nasledujúcej definícií.

Súčinová magická kocka rádu n je 3-rozmerná tabuľka $n\times n\times n$ (3-rozmerná matica rádu n)

$$\mathbf{Q}_n = |\mathbf{q}_n(i,j,k); \quad 1\leq i,j,k\leq n|,$$

ktorá obsahuje n^3 navzájom rôznych prirodzených čísel tak, že súčin n-tice čísel v každom riadku, stĺpci, tráme a na každej diagonále (n-tica prvkov na telesovej uhlopriečke kocky) je rovnaký. Tento súčin nazývame *magická konštanta* a označujeme symbolom $\sigma(\mathbf{Q}_n)$. Na *obrázku 4* je nakreslená súčinová magická kocka $\mathbf{Q}_3$ s magickou konštantou $\sigma(\mathbf{Q}_3) = (2\cdot 3\cdot 5)^3 = 27\,000$. Prvok $\mathbf{q}_3(1,1,1) = 18$ sa nachádza v riadku $\{18,20,75\}$, v stĺpci $\{18,300,5\}$, na tráme $\{18,60,25\}$ a na diagonále $\{18,30,50\}$.



Obrázok 4

V ďalšej časti slovom *riadok* rozumieme nielen riadok, ale aj stĺpec a trám magickej kocky. Môžeme si položiť analogické otázky, aké sme sformulovali pre súčinové magické štvorce. Odpovede na ne zatiaľ neboli publikované a budú (pravdepodobne) predmetom skúmania.

Z existencie magickej kocky rádu $n \neq 2$ vyplýva aj existencia súčinovej magickej kocky rovnakého rádu. Ak poznáme konštrukciu magickej kocky $\mathbf{S}_n = |\mathbf{s}_n(i,j,k); 1 \leq i,j,k \leq n|$ rádu n, tak použitím Pascalovej idey ľahko zostrojíme súčinovú magickú kocku

$$\mathbf{Q}_n = |\mathbf{q}_n(i,j,k) = 2^{\mathbf{s}_n(i,j,k)-1}; 1 \leq i,j,k \leq n|$$

s magickou konštantou $\sigma(\mathbf{Q}_n) = 2^{\frac{n(n^3-1)}{2}}$. Pretože toto číslo je veľmi veľké, v ďalšej časti uvedieme konštrukcie, ktoré vedú k súčinovým magickým kockám s podstatne menšou magickou konštantou.

Súčinovú magickú kocku $\mathbf{Q}_n = |\mathbf{q}_n(i,j,k); 1 \leq i,j,k \leq n|$ rádu n s menšou magickou konštantou $\sigma(\mathbf{Q}_n)$ zostrojíme použitím nasledujúcich vzorcov, pričom rozlišujeme tri prípady (n nepárne, ak n je párne, tak rozlíšime, či n je alebo nie je deliteľné aj číslom 4.) Vo vzorcoch používame nasledujúce označovanie: $\overline{x} = n+1-x$, $x^* = \min\{x, \overline{x}\}$ a $\lfloor m \rfloor$ je dolná celá časť čísla m.

1. Ak n je nepárne číslo (symbolicky $n \equiv 1 \pmod 2$), tak súčinovú magickú kocku nepárneho rádu zostrojíme nasledujúcim vzorcom

$$\mathbf{q}_n(i,j,k) = 2^{(i-j+k-1) \pmod n} \cdot 3^{(i-j-k) \pmod n} \cdot 5^{(i+j+k-2) \pmod n} \tag{1}$$

Poznámka. Ak n nie je deliteľné číslom 3, tak nielen v každom riadku, ale aj na každej diagonále $\mathbf{Q}_n$ zostrojenej použitím (1) nachádza práve jedno číslo, ktoré je deliteľné z-tou a nie je deliteľné $(z+1)$-mocninou čísla 2 (3, respektíve 5). Magickú súčinovú kocku $\mathbf{Q}_n$ s menšou magickou konštantou $\sigma(\mathbf{Q}_n)$ dostaneme, ak vo vzťahu (1) nahradíme kladné mocniny čísla 3 číslami $(2\beta+1)$ pre $\beta = 1,2,\ldots,n-1$ a mocniny 5^γ číslami $(2n+2\gamma-1)$ pre $\gamma = 1,2,\ldots,n-1$. Na obrázku 5 je päť vrstiev kocky $\mathbf{Q}_5$. (Inou náhradou môžeme získať aj kocku $\mathbf{Q}_5$ s menšou magickou konštantou.)

99	182	300	408	16
1456	75	102	4	792
600	816	1	198	364
204	8	1584	91	150
2	396	728	1200	51

1. vrstva

26	540	952	80	33
135	238	20	264	208
1904	5	66	52	1080
40	528	13	270	476
132	104	2160	119	10

2. vrstva

180	136	144	77	130
34	36	616	1040	450
9	154	260	360	272
1232	65	90	68	72
520	720	17	18	308

3. vrstva

680	48	11	234	420
12	88	1872	105	170
22	468	840	1360	3
117	210	340	24	176
1680	85	6	44	936

4. vrstva

112	55	78	60	1224
440	624	15	306	28
156	120	2448	7	110
30	612	56	880	39
153	14	220	312	240

5. vrstva

Obrázok 5

2. Ak n je deliteľné štyrmi ($n \equiv 0 \pmod 4$), tak

$$\mathbf{q}_n(i,j,k) = \begin{cases} 2^{(i-1)}.3^{(j-1)}.5^{(k-1)} & \text{ak} \quad \mathbb{F}(i,j,k) = 1 \\ 2^{(\bar{i}-1)}.3^{(\bar{j}-1)}.5^{(\bar{k}-1)} & \text{ak} \quad \mathbb{F}(i,j,k) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

kde

$$\mathbb{F}(i,j,k) = (i + \lfloor \frac{2i-1}{n} \rfloor + j + \lfloor \frac{2j-1}{n} \rfloor + k + \lfloor \frac{2k-1}{n} \rfloor) \pmod 2.$$

Poznámka. V [10] je dokázané, že (súčtovú) magickú kocku $\mathbf{S}_n = |\mathbf{s}_n(i,j,k)|$ rádu $n \equiv 0 \pmod 4$ môžeme zostrojiť použitím nasledujúceho vzorca

$$\mathbf{s}_n(i,j,k) = \begin{cases} (i-1)\,n^2 + (j-1)\,n + k & \text{ak} \quad \mathbb{F}(i,j,k) = 1 \\ (\bar{i}-1)\,n^2 + (\bar{j}-1)\,n + \bar{k} & \text{ak} \quad \mathbb{F}(i,j,k) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Použitím (3) môžeme zostrojiť kocku $\mathbf{Q}_n$ s ešte menšou magickou konštantou $\sigma(\mathbf{Q}_n)$. Príslušnú metódu demonštrujeme na nasledujúcom príklade. Na obrázku 5 sú štyri vrstvy magickej kocky $\mathbf{S}_4$ zostrojenej použitím vzorca (3), pričom všetky čísla sú zmenšené o jednotku a sú vyjadrené v dvojkovej sústave.

000000	111110	111101	000011
111011	000101	000110	111000
110111	001001	001010	110100
001100	110010	110001	001111

1. vrstva

101111	010001	010010	101100
010100	101010	101001	010111
011000	100110	100101	011011
100011	011101	011110	100000

2. vrstva

011111	100001	100010	011100
100100	011010	011001	100111
101000	010110	010101	101011
010011	101101	101110	010000

3. vrstva

110000	001110	001101	110011
001011	110101	110110	001000
000111	111001	111010	000100
111100	000010	000001	111111

4. vrstva

Obrázok 6

Keď si pozorne pozriete tento obrázok, potom zistite, že v každej štvorici čísel nachádzajúcich sa v ľubovoľnom riadku alebo diagonále platí, že na ich z-tej pozícii, $z = 1, 2, \ldots, 6$, sa nachádzajú práve dve jednotky a dve nuly. Tento fakt využijeme v konštrukcii. Ak $b_1 b_2 b_3 \ldots b_6$ je vyjadrenie čísla $\mathbf{s}_4(i,j,k)$ zmenšené o 1 v dvojkovej sústave, tak

$$\mathbf{q}_4(i,j,k) = 2^{b_1} 3^{b_2} 4^{b_3} 5^{b_4} 7^{b_5} 9^{b_6}$$

Množinu čísel $\{2,3,4,5,7,9\}$ sme zvolili tak, aby neobsahovala dve neprázdne podmnožiny čísel, ktorých súčiny sú rovnaké. Magická konštanta kocky $\mathbf{Q}_4$ na (*obrázku 7*) je $\sigma(\mathbf{Q}_4) = (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9)^2 = 57\,153\,600$.

1	840	1080	63
1512	45	35	24
1890	36	28	30
20	42	54	1260

1. vrstva

2520	27	21	40
15	56	72	945
12	70	90	756
126	540	420	2

2. vrstva

3780	18	14	60
10	84	108	630
8	105	135	504
189	360	280	3

3. vrstva

6	140	180	378
252	270	210	4
315	216	168	5
120	7	9	7560

4.vrstva

Obrázok 7

Pretože binárne vyjadrenie prvkov (zmenšených o 1) magickej kocky $\mathbf{S}_n$ spĺňa podmienky o rovnakých počtoch jednotiek a núl na odpovedajúcich miestach, uvedenú konštrukciu môžeme zovšeobecniť pre všetky $n \equiv 0 \pmod 4$.

$\mathbf{3}$. Ak n je párne a nie je deliteľné štyrmi ($n \equiv 2 \pmod 4$), tak

$$\mathbf{q}_n(i,j,k) = 7^{\mathbf{d}(u,v)}.\mathbf{q}_{\frac{n}{2}}(i^*,j^*,k^*) \tag{4}$$

kde sú použité označenia a matica $\mathbf{d}(u,v)$, ktoré boli zavedené v [7].

V tomto príspevku sme uviedli konštrukcie súčinových magických štvorcov a kociek. Podrobný popis konštrukcií a dôkazy správnosti sú v práci, ktorá je pripravovaná do tlače. Aj keď mnohí sa domnievajú, že v matematike nie je čo skúmať, tento príspevok je dôkazom toho, že tomu tak nie je a ostáva ešte veľa zaujímavých problémov pre záujemcov o prácu v matematike. Mnohí z nás hľadajú námety pre svoju diplomovú alebo rigoróznu prácu. S magickými štvorcami sa žiaci stretávajú už v treťom ročníku základnej školy. S vhodnými úlohami o súčinových magických štvorcoch by sa mohli stretnúť, keď sa budú učiť o rozkladoch čísel na prvočísla alebo o logaritmoch. Táto práca by mohla byť podmetom, pre vytvorenie vhodnej série úloh. Ako príklad uvádzame niekoľko netriviálnych úloh.

1	2.	1.	15
2.	10	4	6
20	.	.8	2
12	.	5	28

Obrázok 8

1		20	
	10		3
14		18	
	6		28

Obrázok 9

Úloha 1. V tabuľke na *obrázku 8* nahraďte bodky číslicami tak, aby súčiny čísel v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach boli rovnaké.

Úloha 2. Do prázdnych políčok tabuľky na *obrázku 9* doplňte navzájom rôzne čísla tak, aby súčiny čísel v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach boli rovnaké.

Úloha 3. Existuje súčinový magický štvorec taký, že aj súčet čísel, v každom riadku, stĺpci a oboch diagonálach je rovnaký ?

Úloha 4. Existuje súčinový magický štvorec rádu 3 s menšou magickou konštantou ako štvorec, ktorý je na *obrázku 2*?

Úloha 5. Zostrojte všetky navzájom rôzne súčinové magické štvorce rádu 3 a magickou konštantou 216.

Úloha 6. Dokážte, že existuje nekonečne veľa súčinových magických štvorcov rádu 3.

Úloha 7. Existuje súčinový magický štvorec, ktorý sa skladá z čísel tvoriacich aritmetickú postupnosť ?

Úloha 8. Na základe uvedených konštrukcií, urobte algoritmus na vytváranie súčinových magických štvorcov a kociek.

Úloha 9. Vytvorte internetovské stránky venované súčinovým magickým štvorcom a kockám. (Koncom roku 2001 takáto stránka neexistovala.)

Dalo by sa sformulovať ešte mnoho podobných úloh a to nielen štvorcoch, ale aj o kockách. Môžeme sa venovať aj iným magickým obrázkom. Zaujímavé sú súčinové magické hviezdy (viď [12]), o ktorých doposiaľ nebolo nič publikované. Koncom 19.storočia (viď [1, str.351]) sa matematici začali zaoberať 4-rozmernými magickými kockami. Neskôr boli publikované práce aj o viacrozmerných magických kockách Až v roku 2000 bola publikovaná práca [10], ktorá podáva konštrukciu magickej p-rozmernej kocky rádu n pre všetky $p > 1$ a $n \neq 2$. Podobne môžeme uvažovať o existencii súčinových magických p-rozmerných kockách pre ľubovoľné prirodzené číslo p. Publikované konštrukcie umožňujú experimentovať so súčinovými magickými p-rozmernými kockami aj v priestoroch vyšších rozmerov.

Matematik k svojej práci potrebuje, nielen ceruzku a papier, ale aj dostatok informácií. Niekedy však stačí sadnúť si k počítaču a začať surfovať po Internete. Takto získate množstvo zaujímavých materiálov pre svoju prácu. Napríklad: knihy [4, 8] sú prístupné v elektronickej verzii na stránkach Cornell University Library – Math Book Collection (`http://cdl.library.cornell.edu/cdl-math-browse.html`). Na tomto serveri je prítupných viac ako 500 starých matematických kníh. Práca [9] je uvedená v PDF-formáte na stránke `http://www.m-a.org.uk/eb/mg/mg084a.pdf`. Musíme však upozorniť na to, že občas sú (najmä na stránkach matematikov-amatérov) uvedené nesprávne tvrdenia. Napríklad, vzorce na vytváranie p-rozmerných magických kociek, ktoré môžete nájsť na dvoch internetových stránkach sú chybné. Avšak, ani to, že práce bola publikovaná v známom matematickom časopise nie je zárukou toho, že je správna. Príkladom publikovania chybného tvrdenia je [6].

Literatúra

[1] Andrews, W. S.: *Magic squares and cubes* Dover, New York, 1960.
[2] Borkovitz, D. – Hwang, F. K.: *Multiplicative magic squares* Discrete Mathematics **47,** 1983, 1–11.

[3] Descombes, R.: *Les Carrés Magiques, Histoire, théorie et technique du carré magique, de l'Antiquité aux recherches actuelles,* Editions Vuibert, Paris, 2000.
[4] Hugel, T.: *Das Problem der magischen Systeme* Gettschick-Verlag, 1876.
[5] Heinrich, K. – W.Hilton, A. J.: *Doubly diagonal orthogonal Latin squares.* Discrete Mathematics, **46,** 1983, 171–182.
[6] Libis, C. – Phillips, J. D. –Spall, M.: *How many magic squares are there?* Mathematics Magazine, **73,** 2000, 57–58.
[7] Semanišinová, I. – Trenkler, M.: *O nadprirodzenej korytnačke, magických štvorcoch a kockách,* Obzory matematiky, fyziky a astronómie, **4,** 2000, 29, 21–34.
[8] Schubert, H.: *Mathematical essays and recreations,* Chicago, 1903.
[9] Trenkler, M.: *A construction of magic cubes,* The Mathematical Gazette, **84,** 2000, 36–41.
[10] Trenkler, M.: *Konštrukcia magických p-rozmerných kociek,* Obzory matematiky, fyziky a astronómie, **59,** 2000, 19–29.
[11] Trenkler, M.: *Magic p-dimensional cubes,* Acta Arithmetica, **96,** 2001, 361–364.
[12] Trenkler, M.: *Magické hviezdy,* Obzory matematiky, fyziky a astronómie, **51,** 1998, 1–7.

Adresa autora:
Marián Trenkler, Katedra geometrie a algebry, Prírodovedecká fakulta, Univerzita P. J. Šafárika, Jesenná 5, 041 54 Košice
e-mail: `trenkler@science.upjs.sk`